大学入学共通テスト　数学ＩＡ解答・解説

第１問〔１〕

$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$・・・①

（１）$c=1$より①の左辺は

$2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)$

よって、①の解は$x=-\dfrac{5}{2}$、2

（２）c＝2より①は

$2x^2+5x-5=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+40}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$$

よって、$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$なので

$$\frac{5}{\alpha}=\frac{4\times5}{\sqrt{65}-5}=\frac{4\times5\left(\sqrt{65}+5\right)}{\left(\sqrt{65}-5\right)\left(\sqrt{65}+5\right)}$$

$$=\frac{20\left(\sqrt{65}+5\right)}{65-25}=\frac{20\left(\sqrt{65}+5\right)}{40}=\frac{\sqrt{65}+5}{2}$$

$\sqrt{65}\fallingdotseq8$なので

$$\frac{\sqrt{65}+5}{2}\fallingdotseq\frac{8+5}{2}=6.5$$

よって$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$をみたす整数mは$m=6$

（３）①の元の方程式の判別式をDとおくと

$D=(4c-3)^2-4\cdot2\cdot(2c^2-c-11)=-16c+97$

①の解が異なる２つの有理数となるためには、Dが正の平方数となればよい。

$-16c+97>0$をみたす正の整数cは

$c=1, 2, 3, 4, 5, 6$

このうち、条件に合うcは$c=1, 3, 6$なので求めるcの個数は３個。

〔２〕（１）$\cos A=\dfrac{3}{5}$より、$\sin A=\dfrac{4}{5}$

よって、$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\dfrac{4}{5}=12$

$\triangle AID=\dfrac{1}{2}\cdot AI\cdot AD\cdot\sin\angle IAD$

ここで、$\sin\angle IAD=\sin(360^\circ-180^\circ-A)$

$=\sin(180^\circ-A)=\sin A$・・・◎

よって、$\triangle AID=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin A=\triangle ABC=12$

（２）条件から$S_1=a^2$、$S_2=b^2$、$S_3=c^2$。

$0^\circ<A<90^\circ$のとき$a^2<b^2+c^2$をみたす。

よって$a^2-b^2-c^2<0$。つまり$S_1-S_2-S_3<0$（②）

$A=90^\circ$のとき$a^2=b^2+c^2$をみたす。

よって$a^2-b^2-c^2=0$。つまり$S_1-S_2-S_3=0$（⓪）

$90^\circ<A<180^\circ$のとき$a^2>b^2+c^2$をみたす。

よって$a^2-b^2-c^2>0$。つまり$S_1-S_2-S_3>0$（①）

（３）◎より$\sin A=\sin\angle IAD$。

同様に考えれば、$\sin C=\sin\angle HCG$、$\sin B=\sin\angle EBF$

よって、

$\triangle AID=\triangle ABC$

$\triangle BEF=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot BF\cdot\sin\angle EBF=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot\sin B$

$=\triangle ABC$

$\triangle CGH=\dfrac{1}{2}\cdot CG\cdot CH\cdot\sin\angle HCG=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$

$=\triangle ABC$

よって、$T_1=T_2=T_3$（③）

（４）$0^\circ<A<90^\circ$なので、$\cos A>0$である。

また、◎と同様に考えれば、

$\cos\angle IAD=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

よって、余弦定理を考えれば

$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$ID^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle IAD=b^2+c^2-2bc(-\cos A)$

$=b^2+c^2+2bc\cos A$

よって、$ID>BC$　（②）・・・☆

つまり、正弦定理から△ABC、△AIDの外接円の半径をそれぞれR、R’とおくと

$2R=\dfrac{BC}{\sin A}$、$2R'=\dfrac{ID}{\sin\angle IAD}$

であり、◎と☆からR’＞R（②）

以下、△BEF、△CGHの外接円の半径をそれぞれR”、R’”とおく。

$0^\circ<A<B<C<90^\circ$のとき、全問と同様に考えれば

R＜R’、R＜R”、R＜R’”が言える。

つまり、最も小さいのはR（⓪）

$0^\circ<A<B<90^\circ<C$のとき、A、Bは鋭角でCは鈍角だから、

R＜R’、R＜R”、R＞R’”が言える。

よって、R’”＜R＜R’、R’”＜R＜R”が言えるから、最も小さいのはR’”（③）

第２問〔１〕

（１）x：（ストライド）$=\dfrac{100}{歩数}$

y：（ピッチ）$=\dfrac{歩数}{タイム}$

よって、平均速度はxzと表せる（②）

（２）直線の傾きは$\dfrac{-0.1}{0.05}=-2$

よって$z=-2x+b$とおけて$4.7=-2\times2.05+b$

$b=8.8=\dfrac{44}{5}$

よって、$z=-2x+\dfrac{44}{5}$

ここで、$z=4.8$を代入して$4.8=-2x+8.8$

$x=2$

よって、xの変域は$2.00\leqq x\leqq2.40$

$y=xz$に②を代入して

$$y=x\left(-2x+\frac{44}{5}\right)=-2x(x-4.4)$$

この２次関数の軸の方程式は$x=2.2$であるから、この関数の$2.00\leqq x\leqq2.40$の範囲での最大値は$x=2.20$のときの値である。

このときのピッチの値は

$-2\times2.20+8.8=4.40$

であり、このときのタイムは$\dfrac{100}{2.2\times4.4}\fallingdotseq10.33$（③）

〔２〕（１）誤っているのは①、③

（２）1985年は①、1995年は④

（３）（Ⅰ）誤（Ⅱ）正（Ⅲ）誤より⑤

（４）②

第３問

（１）（ｉ）箱 A において、3 回中 1 回当たればいいから

$${}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\cdots①$$

箱 B において、3 回中 1 回当たればいいから

$${}_3C_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\cdots②$$

（ⅱ）$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}$

$P(B\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}$

よって、

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{P(A\cap W)}{P(A\cap W)+P(B\cap W)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}}=\frac{27}{59}$$

$$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{P(B\cap W)}{P(A\cap W)+P(B\cap W)}$$

$$=1-P_W(A)=\frac{32}{59}$$

（２）$P_W(A)$と $P_W(B)$の分母はともに $P(W)$であり、分子はそれぞれ $P(A\cap W)$、$P(B\cap W)$であるから、$P_W(A)$と $P_W(B)$の比は①と②の比に等しい。（③）

（３）箱 C を選ぶ事象を C とおくと求める確率は $P_W(A)$である。

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{P(A\cap W)}{P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)}$$

ここで、$P(C\cap W)=\frac{1}{3}\times{}_3C_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{3}\times\frac{27}{64}$

よって、

$$P_W(A)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{27}{64}}=\frac{216}{715}$$

（４）箱 D において、3 回中 1 回当たる確率は

$${}_3C_1\times\left(\frac{1}{5}\right)^1\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}\text{である。}$$

$\frac{3}{8}$、$\frac{4}{9}$、$\frac{27}{64}$、$\frac{12}{125}$の大小を調べればよい。

$\frac{3}{8}=0.375$、$\frac{4}{9}\fallingdotseq 0.444$、$\frac{27}{64}=0.421$、$\frac{48}{125}=0.384$

であるから、$\frac{3}{8}<\frac{12}{125}<\frac{27}{64}<\frac{4}{9}$。

つまり、順に B＞C＞D＞A（⑧）

第４問

（１）$\begin{cases}5x-3y=1\\x+y=5\end{cases}$の解と考えれば $x=2$、$y=3$

よって、偶数の目が 2 回、奇数の目が 3 回。

（２）（１）から不定方程式 $5x-3y=8$ の解の一つは $x=2\times8$、$y=3\times8$ である。これを用いれば不定方程式 $5x-3y=8$ の解は整数 k を用いて、

$x=2\times8+3k$、$y=3\times8+5k$

と表せる。

$0\leqq y<5$ をみたすのは $k=-4$ のときで $y=4$

このとき、$x=4$

よって、$x+y=4+4=8$ であるから、サイコロを 8 回投げて偶数の目が 4 回、奇数の目が 4 回出れば P_8 に移動できる。

（３）反時計回りに 15 個先の点に移動するためには、偶数の目が 3 回でればよい。

つまり、偶数の目が出る回数が 3 の倍数の場合は無視できる。

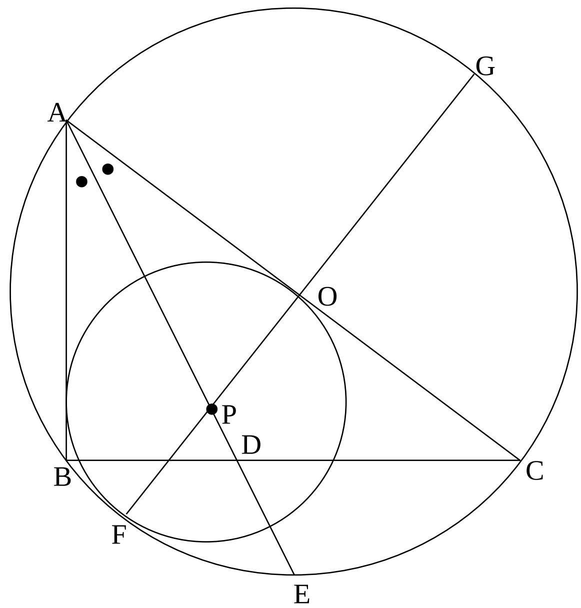
よって、（２）の解の x において 3 を引いても構わないので、$x=1$、$y=4$ でもよいから、偶数の目が 1 回、奇数の目が 4 回出れば投げる回数は 5 回ですむ。

（４）（３）から、回数を最も少なくする回数は、不定方程式 $5x-3y=N$（$N=0, 1, 2, \cdots 14$）の整数解 x, y をそれぞれ 5、3 で割った余りを考えればよい。

すると、N＝13 のとき、（１）を参考にすれば、x＝26、y＝39 が見つかるが、これらをそれぞれ 5、3 で割った余りはそれぞれ 2 と 4 となり、合計 6 回サイコロをふることとなり、これが最も多い場合とわかる。

よって、最小回数が最も大きいのは P_{13}（③）であり、そのときの回数は 6 回である。

第５問



角の二等分線の性質から AB：AC＝BD：DC

ゆえに、$BD=BC\times\frac{3}{3+5}=4\times\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$

よって、三平方の定理から

$$AD=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$\angle ABC=90^\circ$ より、$\angle AEC=90^\circ$ 。

よって、△ABD∽△AEC より、AB：AE＝AD：AC

つまり、$3:AE=\frac{3\sqrt{5}}{2}:5$　　$AE=2\sqrt{5}$

ここで、円 P は AC と接しているので、AC⊥FG

また、円 P は円 O に内接しているから直線 FP すなわち FG は O を通る。ゆえに、AC と円 P の接点は O である。

よって、△AOP∽△ABD より、AP：AD＝OP：BD

つまり、$AP:\frac{3\sqrt{5}}{2}=r:\frac{3}{2}$　　$AP=\sqrt{5}r$

$PG=FG-PF=5-r$

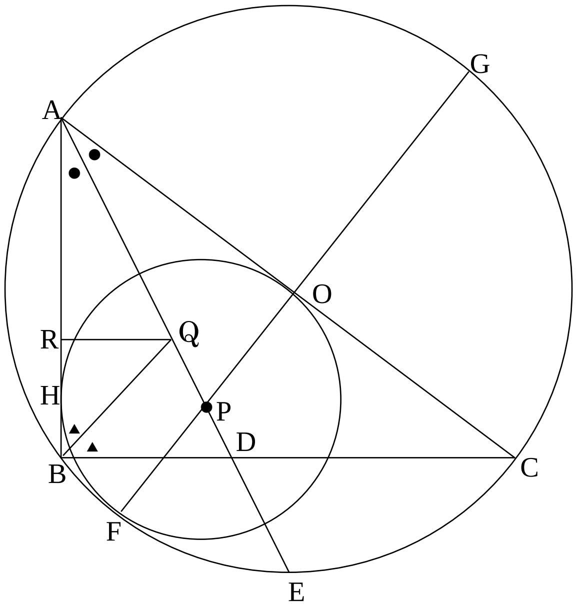
よって、方べきの定理より、

$$PA \times PE = PF \times PG$$

$$\sqrt{5}r \times \left(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r\right) = r \times (5 - r)$$

$r > 0$ より $\sqrt{5} \times \left(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r\right) = 5 - r$

$$r = \frac{5}{4}$$



△ABC の内心が Q であるから BQ は∠ABC の二等分線と AD の交点である。

△ABC の面積を考えれば、△ABC の内接円の半径を t とおくと

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} t (3 + 4 + 5) \qquad t = 1$$

つまり、Q から AB におろした垂線と AB との交点を R とすると、AR＝3－1＝2、QR＝1 ゆえ、三平方の定理から $AQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ である。

また、△ARQ∽△AHP だから

$$AR : AH = AQ : AP \qquad 2 : AH = \sqrt{5} : \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$AH = \frac{5}{2}$$

以上より、

(a) $AH \times AB = \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}$

$$AQ \times AD = \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$$

よって、方べきの定理の逆により 4 点 H, B, D, Q は同一円周上にある。→正

(b) $AQ \times AE = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$

よって、方べきの定理の逆が成り立たないので 4 点 H, B, E, Q は同一円周上にない。→誤

以上より正しいのは①