令和３年度　　共通テスト　　数学ⅡB

解答・解説

第１問

[1](1)問題 A　$y = sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$の最大値？

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$　より**ア１**

よって、三角関数の合成で導出から考えると、

与式　$y = sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}sin\theta + \sin\frac{\pi}{3}cos\theta\right) = \mathbf{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$(∵加法定理より)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$より、両辺に$\frac{\pi}{3}$を加えて、$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$　この範囲において$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$が最大になるのは、

$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$のときで、最大値は$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$より、2×1=**2** をとる、

(2) 問題 B　$y = sin\theta + p\cos\theta$の最大値？

(ⅰ)p=0 のとき、$y = sin\theta$より、$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$のとき最大値 **1** をとる。

(ⅱ)p>0 のとき、加法定理$\cos(\theta - \alpha) = cos\theta cos\alpha + sin\theta \sin\alpha$より、

$y = sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{1+p^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}sin\theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}cos\theta\right\} = \sqrt{1+p^2}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}cos\theta + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}sin\theta\right\} = \sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}}\cos(\theta - \alpha)$

より、**キ⑨**

また加法定理と比較することにより

$sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$、$cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$、$0 < \alpha < \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$となるので、**ク①、ケ③**

y の最大値については、$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$より$-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$ なので$-\frac{\pi}{2} < \theta - \alpha < \frac{\pi}{2}$

従って $\cos(\theta - \alpha)$は $\theta - \alpha = 0$　すなはち $\theta = \alpha$ のとき最大値$y = \sqrt{1+p^2} \times 1 = \sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}}$　をとる。

よって、　**コ①、サ⑨**

(ⅲ)p<0 のとき$y = sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{1+p^2}\cos(\theta - \alpha)$、$sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$、$cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$、$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} < \alpha < \pi$

であるため、

[2]　$f(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{2}$、$g(x) = \frac{2^x-2^{-x}}{2}$

(1) $f(0) = \frac{2^0+2^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \mathbf{1}$、$g(0) = \frac{2^0-2^0}{2} = \frac{1-1}{2} = \mathbf{0}$　より、**セ①、ソ⓪**

相加相乗平均より、$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2\sqrt{2^{x-x}} = 2\sqrt{2^0} = 2\sqrt{1} = 2$

であるから、両辺を 2 で割ることにより、$f(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{2} \geq \frac{2}{2} = 1$なので、最小値 1 をとる。等号成立は、

$2^x = 2^{-x}$のときで、両辺に2^xを掛けると、
$2^{2x} = 2^0$、2x=0、∴x=0 のとき。　　　　よって、**タ 0、チ 1**

$g(x) = -2$ より、$\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2$を満たす x を求める。両辺に 2 を掛けて、

$2^x - 2^{-x} = -4$　、さらに両辺に2^xを掛けると、$2^{2x} - 1 = -4 \times 2^x$より

$2^{2x} + 4 \times 2^x - 1 = 0$　なので、解の公式より、$2^x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$

$2^x > 0$より、$2^x = -2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$　よって、対数の定義より、$x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$　**ツ 5、テ 2**

(2)　$f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x)$、$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x)$

$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \left\{\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right\}^2 = \frac{4}{4} = 1$

$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = 2\frac{(2^x + 2^{-x}) \times (2^x - 2^{-x})}{4} = 2f(x)g(x)$　　よって、**ト⓪、ナ③、ニ 1 、ヌ 2**

(3)　太郎さんが考えた式において、同じ式である（B）右辺を計算する。

$f(\alpha)f(\beta) = \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \times \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2}$

$g(\alpha)g(\beta) = \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \times \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2}$

よって、　$f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) = \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} = f(\alpha + \beta)$が成り立つことがわかる。故に　**ネ①**

第 2 問
(1)　$y = 3x^2 + 2x + 3$　・・①　　$y' = 6x + 2$　・・①'
　　$y = 2x^2 + 2x + 3$　・・②　　$y' = 4x + 2$　・・②'
より、y 軸との交点の y 座標は x=0 を代入した値なので、両式とも同じ　**ア 3**　である。
y 軸との交点における接線の方程式の傾きは、微分した式に x=0 を代入して両式ともに$y' = 2$
切片は(0, 3)より、求める接線の方程式は　**y=2x+3**　である。

①、②式を見比べてると共通点から、x の係数と定数項が同じであれば、y 軸との交点における接線の方程式は同じになることがわかる。よって、エの解答群より、・・2x+3 があるものを選ぶとよい。
よって、正解は　**エ④**

以上のことから、$y = ax^2 + bx + c$上の点(0、c)における接線lの式は、$\boldsymbol{y = bx + c}$　である。
接線lと x 軸との交点の x 座標は y=0 を$y = bx + c$に代入して、整理すると、$\boldsymbol{x = \frac{-c}{b}}$ である。

曲線と接線l、直線$x = \frac{-c}{b}$で囲まれた面積 S は、

$S = \int_{\frac{-c}{b}}^{0} \{(ax^2 + bx + c) - (bx + c)\}dx = \int_{\frac{-c}{b}}^{0} \{ax^2\}dx = \left[\frac{a}{3}x^3\right]_{\frac{-c}{b}}^{0} = 0 - \frac{a}{3}\left(\frac{-c}{b}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{ac^3}{3b^3}}$

$a=1$のとき、$S=\frac{1}{3}(\frac{c}{b})^3$となり、この値が一定になるように正の実数 b、c を変化させるので、グラフの概形は、

$\frac{c}{b}=k$(一定)より、比例のグラフとなる。よって、正解は　**セ⓪**

(2)　$y=4x^3+2x^2+3x+5$　・・④　　$y'=12x^2+4x+3$　・・④'
$y=-2x^3+7x^2+3x+5$　・・⑤　　$y'=-6x^2+14x+3$　・・⑤'
$y=5x^3-x^2+3x+5$　・・⑥　　$y'=15x^2-2x+3$　・・⑥'

y 軸との交点の y 座標は④～⑥に x= 0 を代入して、　**ソ 5**　である。
y 軸との交点における接線の傾きは、y'に x=0 を代入して、傾き 3 であることがわかる。また切片は(0,5)であることから、求める接線の式は、　**y=3x+5**　である。

④～⑥の式を見比べると、x の係数と定数項が同じであれば、y 軸との交点における接線の式が同じであることがわかる。

よって、$y=ax^3+bx^2+cx+d$上の点(0、d)における接線の式は、$\boldsymbol{y=cx+d}$　である。

次に、$h(x)=f(x)-g(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)-(cx+d)=ax^3+bx^2$とおくと、

$y=h(x)=ax^3+bx^2=x^2(ax+b)$より概形は、3 次関数のグラフで、x=0 で接しており、さらに$x=-\frac{b}{a}<0$で交わることがわかるから、　**ナ②**　である。

共有点の座標は前述より、$y=0$とおいて、$\boldsymbol{-\frac{b}{a}}$、**0** である。

また、$y=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$、$y'=3ax^2+2bx$より、

$-\frac{b}{a}$<x<0 の範囲で$|f(x)-g(x)|$が最大となるのは、②のグラフより、極値をとる x の値である。

$y'=3ax^2+2bx=0$、$x(3ax+2b)=0$より、$\boldsymbol{x=\frac{-2b}{3a}}$のときである。

第 3 問
(省略)

第 4 問
(1)　$\{a_n\}$は初項 3、公差 p の等差数列であるから、一般項の公式より、
$a_n=\mathbf{3}+(n-1)p$　・・②
また、$n\to n+1$を代入して、
$a_{n+1}=3+(n+1-1)p=3+np$　・・・③
$\{b_n\}$は初項 3、公差 r の等差数列であるから、一般項の公式より、
$b_n=\mathbf{3}\cdot r^{n-1}$
と表される。

①の両辺をb_nで割ると、　$\frac{a_n b_{n+1}}{b_n}-2a_{n+1}+3\frac{b_{n+1}}{b_n}=0$ となる。

ここで$\frac{b_{n+1}}{b_n}=r$であることから、これを代入して、$ra_n-2a_{n+1}+3r=0$

ゆえに、$\boldsymbol{2}a_{n+1}=r(a_n+\boldsymbol{3})$ ・・・④が成り立つ。

④に②と③を代入すると、

$2(3+np)=r(3+(n-1)p+3)$

$6+2np=6r+r(n-1)p$となるので、$\boldsymbol{(r-2)pn=r(p-6)+6}$ ・・・⑤

⑤がすべての n について成り立つこと、p は 0 でないことから、r=2 となる。よって、r=2 を⑤に代入して、

$0=2(p-6)+6$　これを解いて、$\boldsymbol{p=3}$　を得る。

(2)p=3、r=2 であることからそれぞれの一般項は、

$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}$

よって、第 n 項までの和は等差数列、等比数列の和の公式より、

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{2}n(2\times 3+(n-1)\times 3)=\boldsymbol{\frac{3}{2}n(n+1)}$

$\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{3(2^n-1)}$

(3) ⑥式を$c_{n+1}=$の形になおすと、

$c_{n+1}=\boldsymbol{\frac{4a_{n+1}}{a_n+3}}c_n$を得る。

この式に　$a_n=3n$、$a_{n+1}=3(n+1)$ を代入すると、

$c_{n+1}=\boldsymbol{\frac{4\times 3(n+1)}{3n+3}}c_n=\boldsymbol{4}c_n=$

よって、公比が 4(1 より大きい)等比数列であることがわかる。　<u>タ②</u>

(4)　⑦を変形すると、

$d_{n+1}=\boldsymbol{\frac{2}{q}}(d_n+u)$

したがって、公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列になるには、

$\frac{2}{q}<1$より、$\boldsymbol{q>2}$　**かつ　u=0**　である。